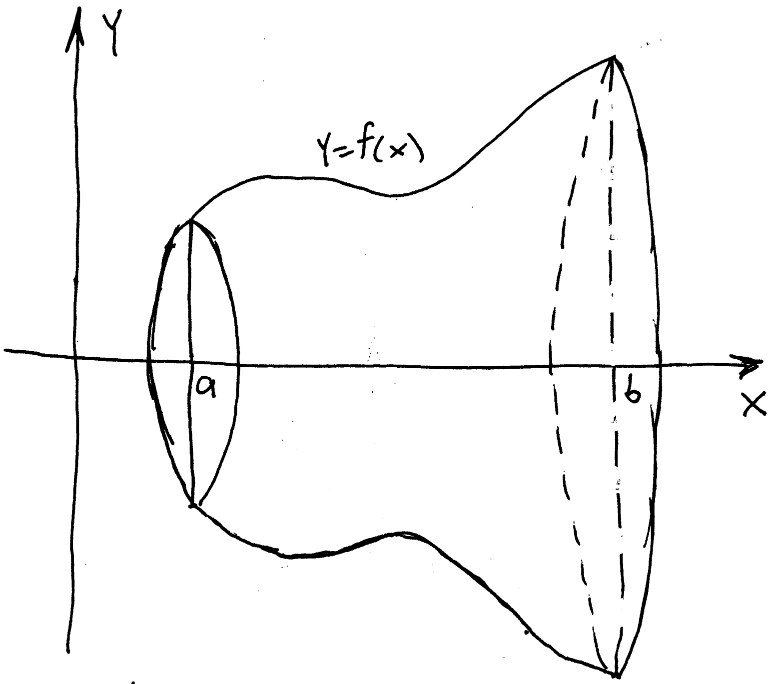
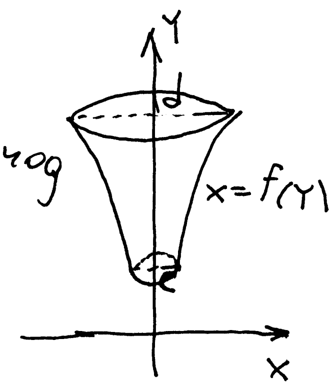
# II Zapremina rotacionog tijela




zapremina tijela dobijenog rotacijom dijela krive $y=f(x)$ oko x-ose

$$V_x = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2 \, dx$$

$$V_y = \pi \int_c^d [f(y)]^2 \, dy$$ - zapremina tijela dobijenog rotacijom dijela krive $x=f(y)$ oko y-ose




Ako je kriva data u parametarskom obliku:

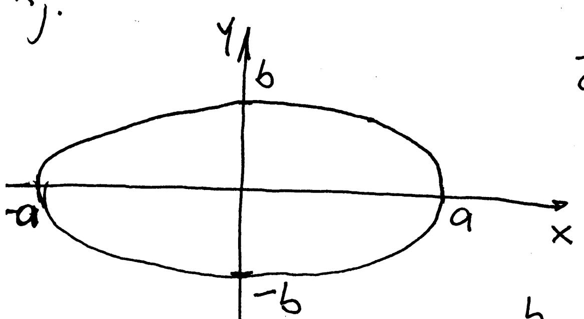
$x = \alpha(t)$
$y = \beta(t)$
$t_1 \leq t \leq t_2$

$$V_x = \pi \int_{t_1}^{t_2} [\beta(t)]^2 \, |\alpha'(t)| \, dt$$

$$V_y = \pi \int_{t_1}^{t_2} [\alpha(t)]^2 \, |\beta'(t)| \, dt$$

1. Izračunati zapreminu tijela koje nastaje rotacijom krive $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ oko y-ose.

Rj.




$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$x^2 = a^2 \cdot \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)$$

$$x^2 = a^2 \cdot \frac{b^2 - y^2}{b^2}$$

$$x^2 = \frac{a^2}{b^2} \cdot (b^2 - y^2)$$

$$x = \pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2}$$

$$V_y = \pi \int_{-b}^{b} [f(y)]^2 \, dy = \pi \int_{-b}^{b} \frac{a^2}{b^2}(b^2 - y^2) \, dy = 2\pi \frac{a^2}{b^2} \int_0^b (b^2 - y^2) \, dy =$$

Parna f-ja (simetrična u odnosu na Y-osu)

$$= 2\pi \frac{a^2}{b^2}\left(b^2 y\Big|_0^b - \frac{y^3}{3}\Big|_0^b\right) = 2\pi\frac{a^2}{b^2}\left(b^3-\frac{1}{3} b^3\right) = 2\pi \frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{2}{3} b^3 = \frac{4\pi a^2 b}{3}.$$

2. Figura u ravni ograničena parabolom $y=4-x^2$ i pravama $y\geq 3x$, $y\geq 0$ rotira oko x-ose. Izračunati zapreminu dobijenog tijela.

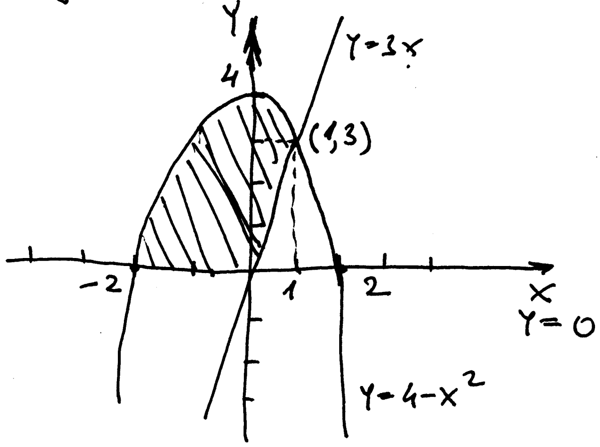
Rj.

$$\begin{aligned} y &= 4-x^2 \\ y &= 3x \\ \hline 3x &= 4-x^2 \\ x^2+3x-4 &= 0 \\ D &= 9+16=25 \\ x_{1,2} &= \frac{-3\pm 5}{2} \end{aligned}$$

$x_1=-4 \Rightarrow y_1=-12$

$x_2=1 \Rightarrow y_2=3$

$A(-4,-12)$ i $B(1,3)$ su tačke presjeka prave i parabole




$$V_x = V_1 - V_2, \quad V_1 = \pi\int_{-2}^{1}(4-x^2)^2\,dx, \quad V_2=\pi\int_0^1 (3x)^2\,dx$$

$$V_1 = \pi\int_{-2}^{1}(16-8x^2+x^4)\,dx = \pi\left(\underbrace{16x\Big|_{-2}^{1}}_{1-(-2)} - 8\underbrace{\frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{1}}_{1^3-(-2)^3} + \underbrace{\frac{x^5}{5}\Big|_{-2}^{1}}_{1^5-(-2)^5}\right) = \pi\left(16\cdot 3-\frac{8}{3}\cdot 9+\frac{1}{5}\cdot 33\right)$$

$$= \pi\left(48-24+\frac{33}{5}\right) = \frac{158}{5}\pi$$

$$V_2 = \pi\cdot 9\int_0^1 x^2\,dx = 9\pi\,\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = 3\pi(1-0)=3\pi$$

$$V=V_1-V_2 = \frac{158}{5}\pi - 3\pi = \frac{158\pi-15\pi}{5} = \frac{138}{5}\pi$$

3. Izračunati zapreminu tijela nastalog obrtanjem oko x-ose figure omeđenu krivom $y=\arcsin x$ i pravama $x=1$ i $y=0$. Uputa: parcijalna integracija 2x

4. Izračunati zapreminu tijela koje nastaje rotacijom ravne figure ograničene parabolom $y=6-x-x^2$ i prave $y=0$ oko x-ose.

(#) Izračunati zapreminu tijela koje nastaje rotacijom figure određene parabolom $y^2=9-3x$, tangentom na tu parabolu u tački $A(0,3)$ i x-osom oko x-ose.

Rj.

$y^2=9-3x$

$3x=-y^2+9$

$x=-\frac{1}{3}y^2+3$

f-ja je ovog oblika

$x'=-\frac{2}{3}y$

$x'=0$ akko $y=0$

$T(3,0)$ je tjeme f-je

$x=0 \Rightarrow y=\pm 3$

Koeficijent pravca tangente

$k=x'(A)=-\frac{2}{3}\cdot 3=-2$

$x-x_1=k(y-y_1)$

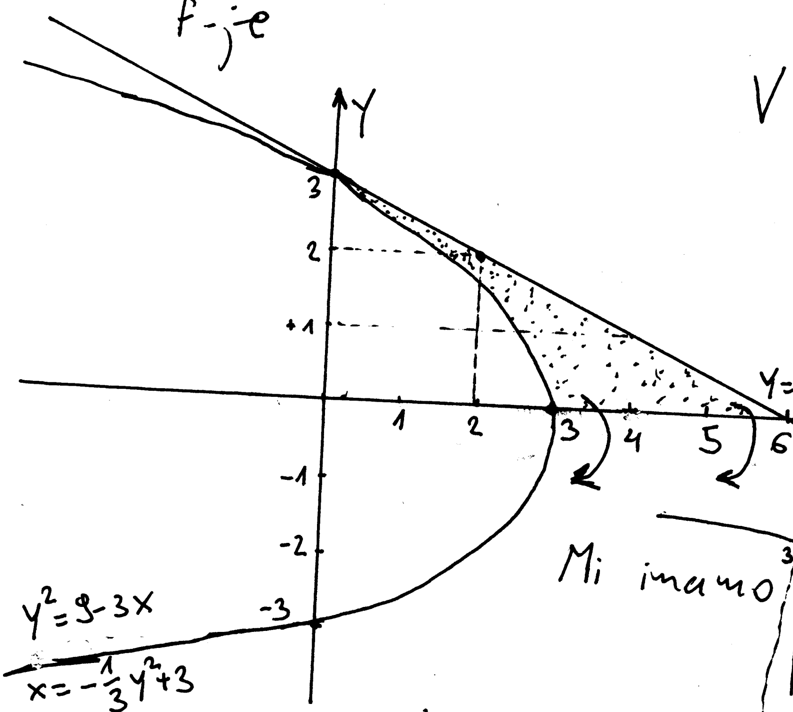
$x-0=(-2)(y-3)$

$x=-2y+6$

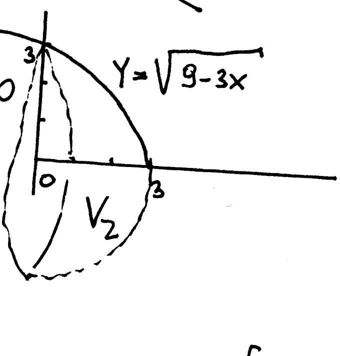
$-2y=x-6$

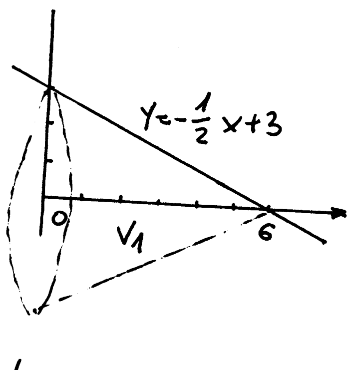
$y=-\frac{1}{2}x+3$

$V=\pi\int_a^b[f(x)]^2dx$ je zapremina tijela dobijena rotacijom dijela krive $y=f(x)$ oko x-ose




Mi imamo



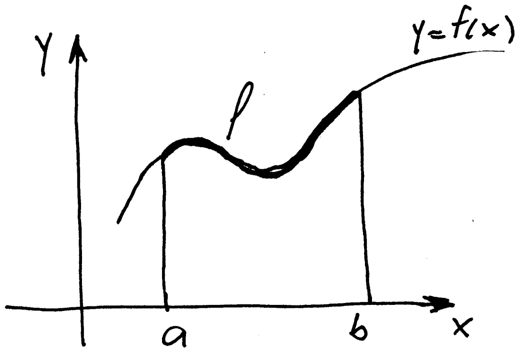

Zapremina našeg tijela se računa po formuli

$$V=V_1-V_2=\pi\int_0^6\left(-\frac{1}{2}x+3\right)^2dx-\pi\int_0^3\left(\sqrt{9-3x}\right)^2dx \overset{(1)\,i\,(2)}{=\!=} \frac{9}{2}\pi$$

$$V_1=\pi\int_0^6\left(\frac{1}{4}x^2-3x+9\right)dx=\pi\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}x^3\Big|_0^6-3\cdot\frac{1}{2}x^2\Big|_0^6+9x\Big|_0^6\right)=\pi(18-54+54)=18\pi \quad \ldots(1)$$

$$V_2=\pi\int_0^3(9-3x)dx=\pi\left(9x\Big|_0^3-3\cdot\frac{1}{2}x^2\Big|_0^3\right)=\pi\left(27-\frac{27}{2}\right)=\frac{27}{2}\pi \quad \ldots(2)$$

# III Dužina luka krive




$$l=\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$

dužina luka krive $y=f(x)$

$$l=\int_c^d \sqrt{1+[f'(y)]^2}\,dy$$

dužina luka krive $x=f(y)$

Ako je kriva data u parametarskom obliku:

$$\begin{aligned} x&=x(t)\\ y&=y(t)\\ t_1&\le t\le t_2 \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad l=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{(\dot{x})^2+(\dot{y})^2}\,dt$$

gdje je $\dot{x}=\dfrac{dx}{dt}$

i $\dot{y}=\dfrac{dy}{dt}$ (izvod po t)

1. Izračunati dužinu luka krive $y=\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{\ln x}{4}$ ako je $1\le x\le 3$.

Rj. $l=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$, $\quad y=f(x)=\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{\ln x}{4}=\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{4}\ln x$

$$y'=\frac{1}{2}\cdot 2x-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x}=x-\frac{1}{4x}$$

$$l=\int_1^3\sqrt{1+\left(x-\frac{1}{4x}\right)^2}\,dx=\int_1^3\sqrt{1+x^2-\cancel{2x}\cdot\frac{1}{\cancel{4x}_{2}}+\frac{1}{16x^2}}\,dx=\int_1^3\sqrt{x^2+\frac{1}{2}+\frac{1}{16x^2}}$$

$$=\int_1^3\sqrt{\left(x+\frac{1}{4x}\right)^2}\,dx=\int_1^3\left(x+\frac{1}{4x}\right)dx=\frac{x^2}{2}\Big|_1^3+\frac{1}{4}\ln x\Big|_1^3=\frac{1}{2}(9-1)+\frac{1}{4}(\ln 3-\ln 1)$$

$$=4+\frac{1}{4}\ln 3=4+\ln\sqrt[4]{3}.$$

$$\boxed{\frac{1}{4}\ln 3=\ln 3^{\frac{1}{4}}}$$

(2.) Naći dužinu luka kojeg na paraboli $y^2=2x+1$ odsjeca prava $x-y=1$.

Rj.

$$\frac{\begin{array}{c} y^2=2x+1 \\ x-y=1 \end{array}}{\begin{array}{c} y^2=2x+1 \\ y=x-1 \end{array}}$$

$$(x-1)^2=2x+1$$

$$x^2-2x+1=2x+1$$

$$x^2-4x=0$$

$$x(x-4)=0$$

$$x_1=0 \Rightarrow y_1=-1$$

$$x_2=4 \Rightarrow y_2=3$$

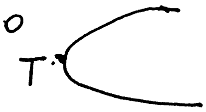
$A(0,-1)$ ; $B(4,3)$ su tačke presjeka parabole i prave

$$y^2=2x+1 \qquad x=0 \Rightarrow y=\pm 1$$

$$2x=y^2-1$$

$$x=\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{2}$$

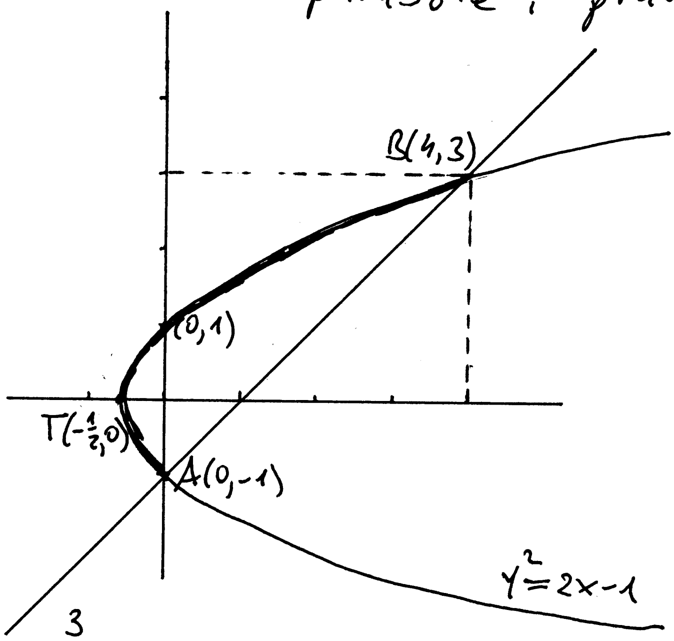
$a>0$




$$T\left(-\frac{1}{2},0\right)$$

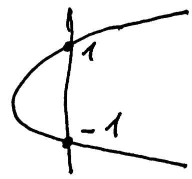
$$D=1$$

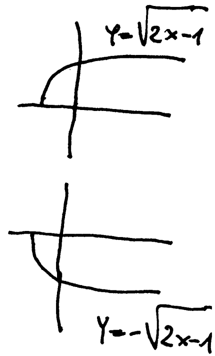
$$-\frac{D}{4a}=-\frac{1}{4\cdot\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}, \quad -\frac{b}{2a}=0$$




$$y^2=2x+1$$

$$y=\pm\sqrt{2x-1}$$




$$y^2=2x+1$$

$$x=\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{2}$$

$$x'=\frac{1}{2}\cdot 2y=y \quad \text{tj.} \quad x'_y=y$$

$$l=\int_{-1}^{3}\sqrt{1+y^2}\,dy$$

integral $\int\sqrt{1+y^2}\,dy$ smo uradili Metodom Ostrogradskog, 3 zadatak na 65 strani u skripti (umjesto y imali smo x)

$$l=\int_{-1}^{3}\sqrt{1+y^2}\,dy=\frac{1}{2}y\sqrt{y^2+1}\Big|_{-1}^{3}+\frac{1}{2}\ln\left|y+\sqrt{y^2+1}\right|\Big|_{-1}^{3}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(3\sqrt{10}-(-1)\sqrt{2}\right)+\frac{1}{2}\left(\ln|3+\sqrt{10}|-\ln|-1+\sqrt{2}|\right)=$$

$$=\frac{3\sqrt{10}+\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{3+\sqrt{10}}{\sqrt{2}-1}\cdot\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}\right|=\frac{3\sqrt{10}+\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\ln\left|(3+\sqrt{10})(\sqrt{2}+1)\right|$$

$$=\frac{3\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2}+\ln\sqrt{(3+\sqrt{10})(\sqrt{2}+1)}$$

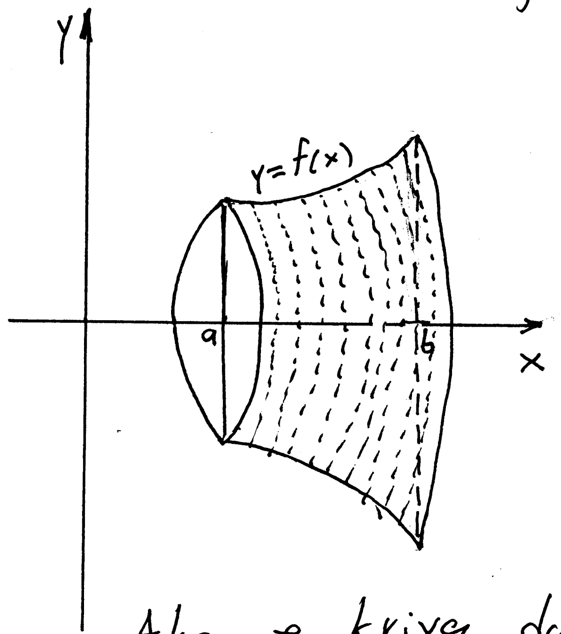
3. Izračunati dužinu luka krive

a) $y=\sqrt{2x-x^2}-1$, ako je $\frac{1}{4}\leq x\leq 1$

b) $x=\frac{1}{4}y^2-\frac{1}{2}\ln y$, ako je $1\leq y\leq e$

## IV Komplanacija obrtne površi

komplanacija lat. postupak za izračunavanje površina dijelova zakrivljenih ploha




površina omotača tijela dobijenog rotacijom dijela krive $y=f(x)$ oko x-ose

$$P=2\pi\int_a^b |f(x)|\cdot\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

Ako je kriva data u parametarskom obliku

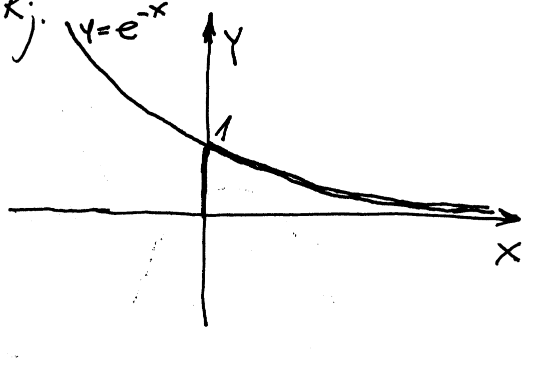
$x=\alpha(t)$
$y=\beta(t)$
$t_1\leq t\leq t_2$

$$\Rightarrow \quad P=2\pi\int_{t_1}^{t_2} |\beta(t)|\cdot\sqrt{(\dot{x})^2+(\dot{y})^2}\,dt$$

gdje je $\dot{x}=\frac{dx}{dt}$, $\dot{y}=\frac{dy}{dt}$

1. Izračunati površinu omotača tijela koje nastaje rotacijom krive $y=e^{-x}$ oko x-ose za $x\geq 0$.

Rj.




$y=e^{-x}$, $y'=e^{-x}\cdot(-1)=-e^{-x}$

$$P=2\pi\int_0^{+\infty} e^{-x}\cdot\sqrt{1+e^{-2x}}\,dx$$

$$=2\pi\lim_{R\to+\infty}\int_0^R e^{-x}\sqrt{1+e^{-2x}}\,dx$$

$$\int_0^R e^{-x}\sqrt{1+e^{-2x}}\,dx = \left|\begin{matrix} u=e^{-x} & x=0 \Rightarrow u=1 \\ du=-e^{-x}dx & x=R \Rightarrow u=e^{-R} \\ -du=e^{-x}dx & \end{matrix}\right| = \int_1^{e^{-R}}\sqrt{1+u^2}\cdot(-du)$$

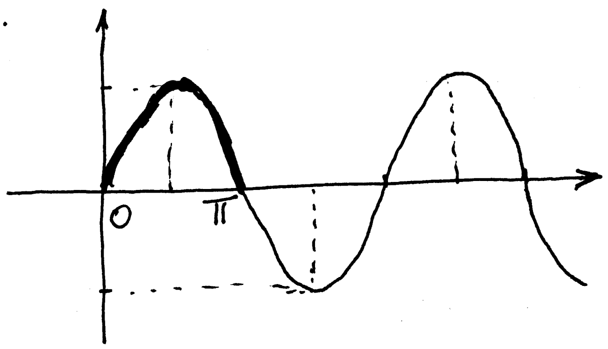
$$= -\int_1^{e^{-R}}\sqrt{1+u^2}\,du = \int_{e^{-R}}^1\sqrt{1+u^2}\,du \ \overset{\text{rađeno ranije}}{\underset{\text{(metoda Ostrograd.)}}{=}}\ \frac{1}{2}u\sqrt{1+u^2}\Big|_{e^{-R}}^1 + \frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|\Big|_{e^{-R}}^1$$

$$= \frac{\sqrt2}{2} - \frac{1}{2}e^{-R}\sqrt{1+e^{-2R}} + \frac{1}{2}\ln(1+\sqrt2) - \frac{1}{2}\ln\left(e^{-R}+\sqrt{1+e^{-2R}}\right), \qquad \begin{matrix} e^{-2R}\to 0, & R\to\infty \\ e^{-R}\to 0, & R\to\infty \end{matrix}$$

$$P = 2\pi\lim_{R\to+\infty}\int_0^R e^{-x}\sqrt{1+e^{-2x}}\,dx = 2\pi\left(\frac{1}{2}\sqrt2+\frac{1}{2}\ln(1+\sqrt2)\right) = \pi\left(\sqrt2+\ln(1+\sqrt2)\right)$$

2. Izračunati površinu omotača tijela koje nastaje rotacijom jednog svoda sinusoide $y=\sin x$ oko $x$-ose.

Rj.




$$y=\sin x$$

$$y'=\cos x$$

$$P = 2\pi\int_0^\pi \sin x\cdot\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx =$$

$$= \left|\begin{matrix} \cos x = t & x=0 \Rightarrow t=1 \\ -\sin x\,dx = dt & x=\pi \Rightarrow t=-1 \\ \sin x\,dx = -dt & \end{matrix}\right| = 2\pi\int_1^{-1}\sqrt{1+t^2}\,(-dt) = -2\pi\int_1^{-1}\sqrt{1+t^2}\,dt$$

$$= 2\pi\int_{-1}^1\underbrace{\sqrt{1+t^2}}_{\text{parna f-ja}}\,dt = 4\pi\int_0^1\sqrt{1+t^2}\,dt \ \overset{\text{rađeno ranije}}{\underset{\text{(metoda Ostrogradskog)}}{=}}\ 4\pi\left[\frac{1}{2}t\sqrt{1+t^2}\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\ln\left|t+\sqrt{1+t^2}\right|\Big|_0^1\right]$$

$$= 4\pi\cdot\frac{\sqrt2}{2} + 4\pi\cdot\frac{1}{2}\left(\ln(1+\sqrt2)-\underbrace{\ln 1}_{0}\right) = 2\sqrt2\pi + 2\pi\ln(1+\sqrt2)$$

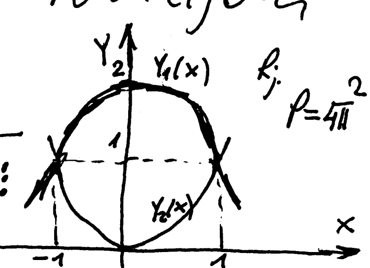
3. Izračunati površinu tijela koje nastaje rotacijom kružnice $x^2+(y-1)^2=1$ oko $x$-ose.

Uputa: $y_1(x) = 1+\sqrt{1-x^2}$

$y_2(x) = 1-\sqrt{1-x^2}$

$$P = P_1+P_2 = 2\pi\int_{-1}^1 y_1(x)\sqrt{1+(y_1')^2}\,dx + \int_{-1}^1 y_2(x)\sqrt{\vdots}$$

tijelo koje nastaje rotacijom → TORUS (ŠLAUF)




Rj. $P=4\pi^2$

# Zadaci za vježbu

**Dužina luka krive*).**

**2519.** Izračunati dužinu luka lančanice $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$ (od $x_1=0$ do $x_2=b$).

**2520.** Izračunati dužinu luka parabole $y^2=2px$ od temena do tačke $M(x, y)$. (Za nezavisno promenljivu uzeti $y$.)

**2521.** Naći dužinu luka krive $y=\ln x$ (od $x_1=\sqrt{3}$ do $x_2=\sqrt{8}$).

**2522.** Naći dužinu luka krive $y=\ln(1-x^2)$ $\left(\text{od } x_1=0 \text{ do } x_2=\frac{1}{2}\right)$.

**2523.** Naći dužinu luka krive $y=\ln\frac{e^x+1}{e^x-1}$ (od $x_1=a$ do $x_2=b$).

**2524.** Izračunati dužinu onog dela semikubne parabole $y^2=\frac{2}{3}(x-1)^3$, koji leži unutar parabole $y^2=\frac{x}{3}$.

**2525.** Izračunati dužinu onog dela semikubne parabole $5y^3=x^2$, koji leži unutar kruga $x^2+y^2=6$.

**2526.** Izračunati dužinu petlje krive $9ay^2=x(x-3a)^2$.

**2527.** Naći obim jednog od krivolinijskih trouglova koji obrazuju apscisna osa i krive $y=\ln\cos x$ i $y=\ln\sin x$.

**2528.** Naći dužinu luka krive $y=\frac{x^2}{4}-\frac{\ln x}{2}$, između njene najniže tačke i temena (teme je tačka na krivoj u kojoj krivina krive dostiže ekstremnu vrednost).

**2529.** Naći dužinu krive $y=\sqrt{x-x^2}+\arcsin\sqrt{x}$.

**2530.** Naći dužinu krive $(y-\arcsin x)^2=1-x^2$.

**2531.** Na cikloidi $x=a(t-\sin t$ [illegible] dužinu prvog svoda cikloide u odnosu **2533*.** $4\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}$. Staviti $x=a\cos^3 t$, $y=b\sin^3 t$.

**2532.** Tačke $A(R, 0)$ i $B(0, R)$ leže na astroidi $x=R\cos^3 t$, $y=R\sin^3 t$, odrediti na njoj tačku $M$ koja deli dužinu luka $\widehat{AB}$ u odnosu $1:3$.

**2533*.** Naći dužinu luka krive

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=1.$$

**2534.** Naći dužinu luka krive $x=a\cos^5 t$, $y=a\sin^5 t$.

**2535.** Naći dužinu luka traktrise $x=a\left(\cos t+\ln\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right)$, $y=a\sin t$ od njene tačke $(0, a)$ do njene tačke $(x, y)$.

**2536.** Naći dužinu luka evolvente kruga

$$x=R(\cos t+t\sin t), \quad y=R(\sin t-t\cos t).$$

(od $t_1=0$ do $t_2=\pi$).

**2537.** Izračunati dužinu luka krive

$$x=(t^2-2)\sin t+2t\cos t, \quad y=(2-t^2)\cos t+2t\sin t.$$

(od $t_1=0$ do $t_2=\pi$).

**2538.** Naći dužinu petlje krive $x=t^2$, $y=t-\frac{t^3}{3}$.

**2539.** Po krugu poluprečnika $a$, spolja i iznutra, kotrljaju se (bez klizanja) istim ugaonim brzinama dva kruga jednakih poluprečnika $b$. U trenutku $t=0$ oni svojim tačkama $M_1$ i $M_2$ dodiruju nepomični krug u tački $M$. Pokazati da dužina puteva koje pređu tačke $M_1$ i $M_2$ za proizvoljni interval vremena $t$, stoje u stalnom odnosu čija je vrednost $\frac{a+b}{a-b}$ (vidi zadatak 2493).

**2540.** Dokazati da dužina onog dela krive $x=f''(t)\cos t+f'(t)\sin t$, $y=-f''(t)\sin t+f'(t)\cos t$, koji odgovara intervalu $(t_1, t_2)$, iznosi

$$[f(t)+f''(t)]\Big|_{t_1}^{t_2}.$$

# Rješenja

**2519.** $\frac{a}{2}\left(e^{\frac{b}{a}}-e^{-\frac{b}{a}}\right)$.

**2520.** $\frac{y}{2p}\sqrt{y^2+p^2}+\frac{p}{2}\ln\frac{y+\sqrt{y^2+p^2}}{p}$.

**2521.** $1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$.

**2522.** $\ln 3-\frac{1}{2}$. **2523.** $\ln\frac{e^b-e^{-b}}{e^a-e^{-a}}$.

**2524.** $\frac{8}{9}\left(\frac{5}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}-1\right)$.

**2525.** $2\frac{26}{27}$. **2526.** $4a\sqrt{3}$.

**2527.** $\frac{\pi}{2}+2\ln\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}=\frac{\pi}{2}+2\ln(\sqrt{2}+1)$.

**2528.** $\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\ln 3$. **2529.** 2. **2530.** 8.

**2531.** za $t=\frac{2\pi}{3}$; $\left[x=a\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad y=\frac{3a}{2}\right]$.

**2532.** za $t=\frac{\pi}{6}$, $\left(x=\frac{3\sqrt{3}}{8}R, \quad y=\frac{R}{8}\right)$.

**2533*.** $4\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}$. Staviti $x=a\cos^3 t$, $y=b\sin^3 t$.

**2534.** $5a\left[1+\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln(2+\sqrt{3})\right]$.

**2535.** $a\ln\frac{a}{y}$. **2536.** $\frac{\pi^2}{2}R$.

**2537.** $\frac{\pi^3}{3}$. **2538.** $4\sqrt{3}$.

# Zadaci za vježbu

**2541.** Primeniti rezultat prethodnog zadatka na izračunavanje dužine luka krive $x = e^t(\cos t - \sin t,\ y = e^t(\cos t - \sin t)$ od $t_1 = 0$ do $t_2 = t$).

**2542.** Dokazati da luci krivih

$$x = f(t) - \varphi'(t), \quad y = \varphi(t) + f'(t)$$

i

$$x = f'(t)\sin t - \varphi'(t)\cos t, \quad y = f'(t)\cos t + \varphi'(t)\sin t$$

koji odgovaraju jednom istom intervalu parametra $t$, imaju jednake dužine.

**2543.** Naći dužinu luka Arhimedove spirale $\rho = a\varphi$ od početne do završne tačke prvog zavoja.

**2544.** Dokazati da luk parabole $y = \frac{1}{2p}x^2$ koji odgovara intervalu $0 \leqslant x \leqslant a$, ima istu dužinu kao i luk spirale $\rho = p\varphi$ koji odgovara intervalu $0 \leqslant \rho \leqslant a$.

**2545.** Izračunati dužinu luka hiperbolične spirale $\rho\varphi = 1$ $\left(\text{od } \varphi_1 = \frac{3}{4} \text{ do } \varphi_2 = \frac{4}{3}\right)$.

**2546.** Naći dužinu kardioide $\rho = a(1 + \cos\varphi)$.

**2547.** Naći dužinu krive $\rho = a\sin^3\frac{\varphi}{3}$ (vidi zad. 2505).

**2548.** Dokazati da je dužina krive $\rho = a\sin^m\frac{\varphi}{m}$ ($m$ je ceo broj) samerljiva sa $a$ ako je $m$ paran broj, a samerljiva sa dužinom kruga poluprečnika $a$ ako je $m$ neparan broj.

**2549.** Za koje se vrednosti izložitelja $k$ ($k \neq 0$) dužina luka krive $y = ax^k$ može izraziti pomoću elementarnih funkcija? (Pozvati se na Čebiševljevu teoremu o integrabilnosti (u konačnom vidu) diferencijalnog binoma).

**2550.** Naći dužinu krive zadate jednačinom $y = \int_{\pi}^{x} \sqrt{\cos x}\, dx$.

**2551.** Izračunati dužinu luka kriv $L = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t} + \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\right) dt,$
ordinatnog početka do najbliže tačke u kojoj je tangenta krive paralelna ordinatnoj osi.

**2552.** Uveriti se da je dužina luka sinusoide $y = \sin x$ koji odgovara jednom njenom periodu, jednaka dužini elipse čije su poluose $\sqrt{2}$ i 1.

**2553.** Pokazati da je dužina luka „prikraćene" ili „izdužene" cikloide $x = mt - n\sin t$, $y = m - n\cos t$ ($m$ i $n$ su pozitivni brojevi) u intervalu od $t_1 = 0$ do $t_2 = 2\pi$, jednaka dužini elipse sa poluosama $a = m + n$ i $b = |m - n|$.

**2554*.** Dokazati da dužina elipse sa poluosama $a$ i $b$ zadovoljava nejednakosti $\pi(a+b) < L < \pi\sqrt{2}\cdot\sqrt{a^2+b^2}$ (zadatak Johana Bernulija).

# Rješenja

**2541.** $2(e^t - 1)$.

**2543.** $\pi a\sqrt{1+4\pi^2} + \frac{a}{2}\ln(2\pi + \sqrt{1+4\pi^2})$.

**2545.** $\ln\frac{3}{2} + \frac{5}{12}$.

**2546.** $8a$. **2547.** $\frac{3}{2}\pi a$.

**549.** $k$ mora imati oblik $\frac{2N+1}{2N}$ ili $\frac{2N}{2N-1}$, pri čemu je $N$ ceo broj.

**2550.** 4. **2551.** $\ln\frac{\pi}{2}$

**2554*.** Dokazati da se dužina elipse može predstaviti u obliku i primeniti teoremu o proceni integrala.

# Zadaci za vježbu

## Zapremina tela

**2555.** Izračunati zapreminu tela ograničenog površinom koja nastaje obrtanjem parabole $y^2=4x$ oko njene ose (obrtni paraboloid), i ravni normalnom na tu osu, postavljenom na odstojanju 1 od temena parabole.

**2556.** Elipsa čija je velika osa $2a$, a mala $2b$ obrće se: a) oko velike ose, b) oko male ose; naći zapremine dobijenih obrtnih elipsoida. Kao specijalan slučaj izvesti otuda obrazac za zapreminu lopte.

**2557.** Simetričan parabolični segment čija je osnovica $a$ i visina $h$, obrće se oko osnovice; izračunati zapreminu tako nastalog obrtnog tela (Kavaljerijev „limun").

**2558.** Figura koju obrazuju hiperbola $x^2-y^2=a^2$ i prava $x=a+h$ $(h>0)$ obrće se oko apscisne ose; naći zapreminu obrtnog tela.

**2559.** Figura koju obrazuju kriva $y=xe^x$, prava $x=1$ i $x$-osa obrće se oko $x$-ose; naći zapreminu tako nastalog obrtnog tela.

**2560.** Lančanica $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ se obrće oko apscisne ose i obrazuje površinu koja se naziva katenoid; naći zapreminu tela ograničenog katenoidom i dvema ravnima normalnim na apscisnu osu i udaljenim od koordinatnog početka za $a$ i $b$ jedinica.

**2561.** Figura koju obrazuju luci parabola $y=x^2$ i $y^2=x$ obrće se oko apscisne ose; izračunati zapreminu tako nastalog obrtnog tela.

**2562.** Naći zapreminu tela koje nastaje obrtanjem petlje krive $(x-4)y^2=$ $=x(x-3)$ oko apscisne ose.

**2563.** „Krivolinijski trapez", sa osnovicom $[0,\ 1]$, ograničen lukom krive $y=\arcsin x$, obrće se oko $x$-ose; naći zapreminu tako nastalog tela.

**2564.** Segment parabole $y=2x-x^2$, čija je osnovica $[0,\ 2]$, obrće se oko ordinatne ose; izračunati zapreminu tako nastalog tela.

**2565.** Figura koju obrazuju luk krive $y=\sin x$ i odsečak $[0,\ \pi]$ apscisne ose, obrće se oko ordinatne ose; naći zapreminu tako nastalog tela.

**2566.** Naći zapreminu tela koje nastaje obrtanjem leminskate $(x^2+y^2)^2=$ $=a^2(x^2-y^2)$ oko apscisne ose.

**2567.** Izračunati zapreminu tela koje nastaje obrtanjem krive:
1) $x^4+y^4=a^2x^2$; 2) $x^4+y^4=x^3$.

**2568.** Jedan svod cikloide $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ obrće se oko svoje tetive; izračunati zapreminu tako nastalog tela.

**2569.** Svod cikloide (vidi prethodni zadatak) zajedno sa svojom tetivom obrće se oko svoje ose simetrije; naći zapreminu tako nastalog tela.

**2570.** Naći zapreminu tela koje nastaje obrtanjem astroide $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ oko svoje ose simetrije.

**2571.** Deo krive $x=\dfrac{c^2}{a}\cos^3 t$, $y=\dfrac{c^2}{b}\sin^3 t$ (evoluta elipse) koji leži u prvom kvadrantu, zajedno sa odgovarajućim odsečcima koordinatnih osa, obrće se oko apscisne ose; naći zapreminu tako nastalog tela.

**2572.** Izračunati zapreminu beskrajnog vretena koje nastaje obrtanjem krive $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ oko svoje asimptote.

**2573.** Izračunati zapreminu tela koje nastaje obrtanjem krive $y^2=2exe^{-2x}$ oko svoje asimptote.

**2574*.** Figura koju obrazuju kriva $y=e^{-x^2}$ i njena asimptota obrće se jedanput oko apscisne, a drugi put oko ordinatne ose; izračunati zapremine tako dobijenih tela.

**2575*.** Izračunati zapreminu tela koje nastaje obrtanjem krive $y=x^2e^{-x^2}$ oko svoje asimptote.

# Rješenja

**2555.** $2\pi$. **2556.** 1) $\dfrac{4}{3}\pi ab^2$; 2) $\dfrac{4}{3}\pi a^2 b$

**2557.** $\dfrac{8}{15}\pi h^2 a$

**2558.** $\dfrac{\pi h^2}{3}(3a+h)$. **2559.** $\dfrac{\pi}{4}(e^2-1)$.

**2560.** $\dfrac{\pi}{4}\left[\dfrac{e^{2b}-e^{-2b}}{2}-\dfrac{e^{2a}-e^{-2a}}{2}+(b-a)\right]$.

**2561.** $\dfrac{3\pi}{10}$.

**2562.** $\dfrac{\pi}{2}(15-16\ln 2)$. **2563.** $\pi\left(\dfrac{\pi^2}{4}-2\right)$.

**2564.** $\dfrac{8\pi}{3}$. **2565.** $2\pi^2$.

**2566.** $\dfrac{\pi a^3}{4}\left[\sqrt{2}\ln(1+\sqrt{2})-\dfrac{2}{3}\right]$.

**2567.** 1) $\dfrac{2}{3}\pi a^3$; 2) $\dfrac{\pi^2}{16}$. **2568.** $5\pi^2a^3$.

**2569.** $\pi a^3\left(\dfrac{3\pi^2}{2}-\dfrac{8}{3}\right)$. **2570.** $\dfrac{32}{105}\pi a^3$.

**2571.** $\dfrac{16\pi c^6}{105ab^2}$. **2572.** $\dfrac{\pi^2}{2}$.

**2573.** $\dfrac{\pi e}{2}$.

**2574*.** 1) $\pi$; 2) $\pi\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.

Vidi uputstvo uz zadatak 2516.

**2575*.** $\dfrac{3\pi\sqrt{2\pi}}{32}$.

Vidi uputstvo uz zadatak 2516.

# Zadaci za vježbu

**2576.** Figura koju obrazuju kriva $y=\frac{\sin x}{x}$ i njena asimptota obrće se oko apscisne ose; izračunati zapreminu tako nastalog tela.

**2577*.** Izračunati zapreminu tela koje nastaje obrtanjem cisoide $y^2=\frac{x^3}{2a-x}$ $(a>0)$ oko njene asimptote.

**2578.** Naći zapreminu tela koje nastaje obrtanjem traktrise $x=a\left(\cos t+\ln \operatorname{tg}\frac{t}{2}\right)$, $y=a\sin t$ oko njene asimptote.

**2579*.** Izračunati zapreminu elipsoida $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

**2580.** 1) Izračunati zapreminu tela ograničenog eliptičkim paraboloidom $z=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}$ i ravni $z=1$.

2) Naći zapreminu tela ograničenog jednogranim hiperboloidom $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-z^2=1$ i ravnima $z=-1$ i $z=2$.

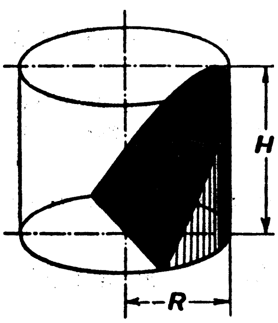
**2581.** Izračunati zapremine tela ograničenih paraboloidom $z=x^2+2y^2$ i elipsoidom $x^2+2y^2+z^2=6$.

**2582.** Naći zapremine tela ograničenih površinama dvogranog hiperboloida $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{9}=1$ i elipsoida $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1$.

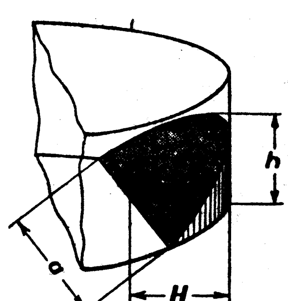
**2583.** Naći zapreminu tela ograničenog konusnom površinom $(z-2)^2=\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}$ i ravni $z=0$.

**2584.** Naći zapreminu tela ograničenog paraboloidom $2z=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}$ i konusom $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=z^2$.

**2585*.** Od kružnog cilindra odsečen je jedan deo tako da presečna ravan prolazi kroz prečnik osnove cilindra („cilindrični odsečak", sl. 43); naći zapreminu tog dela u opštem slučaju, i posebno za $R=10\ cm$, $H=6\ cm$.




Sl. 43




Sl. 44

**2586.** Parabolični cilindar presečen je dvema ravnima od kojih je jedna normalna na izvodnicu; tako obrazovano telo prikazano je na sl. 44. Zajednička osnovica paraboličnih odsečaka je $a=10\ cm$, visina paraboličnog odsečka koji leži u osnovi tela je $H=8\ cm$, a visina samog tela je $h=6\ cm$. Izračunati zapreminu tela.

**2587.** Eliptični cilindar presečen je tako da presečna ravan prolazi kroz malu osu; izračunati zapreminu odsečenog dela (potrebni numerički podaci o dimenzijama dati su na sl. 45).

# Rješenja

**2576*.** $\pi^2$. Iskoristiti obrazac

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}.$$ (Dirihle-ov integral).

**2577*.** $2\pi^2a^3$. Preporučljivo je preći na parametarske jednačine:

$$x=2a\sin^2 t,\quad y=\frac{2a\sin^3 t}{\cos t}.$$

**2578.** $\frac{2}{3}\pi a^3$. **2579*.** $\frac{4}{3}\pi abc$.

Primeniti obrazac

$$v=\int_{x_1}^{x_2} S(x)\,dx,$$ gde je $S(x)$ površina poprečnog preseka.

**2580.** 1) $\pi\sqrt{2}$; 2) $36\pi$.

**2581.** $v_1=\pi\sqrt{2}\left(2\sqrt{6}-\frac{11}{3}\right)$,

$v_2=\pi\sqrt{2}\left(2\sqrt{6}+\frac{11}{3}\right)$.

**2582.** $v_1=v_3=4\pi(\sqrt{6}+\sqrt{3}-4)$,

$v_2=8\pi(4-\sqrt{3})$.

**2583.** $\frac{8\pi\sqrt{6}}{3}$. **2584.** $8\pi$.

**2585*.** $\frac{2}{3}R^2H=400\ cm^3$.

Za apscisnu osu uzeti osu simetrije osnove.

**2586.** $\frac{4}{15}ahH=128\ cm^3$.

**2587.** $\frac{2}{3}abH=133\frac{1}{3}\ cm^3$.

# Zadaci za vježbu

### Površina obrtne površi

**2594.** Naći površinu površi koja nastaje kad se luk parabole $y^2=4ax$ od njenog temena do tačke sa apscisom $x=3a$, obrće oko apscisne ose.

**2595.** Izračunati površinu površi koja nastaje obrtanjem parabole trećeg stepena $3y-x^3=0$ oko apscisne ose (od $x_1=0$ do $x_2=a$).

**2596.** Izračunati površinu katenoida (uporedi i zadatak 2560) koji nastaje obrtanjem lančanice $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$ oko apscisne ose (od $x_1=0$ do $x_2=a$).

**2597.** Obrtanjem elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ oko velike ose dobija se izduženi obrtni elipsoid, a obrtanjem oko male ose — spljošteni obrtni elipsoid.); naći površinu i jednog i drugog.

**2598.** Izračunati površinu tela koje nastaje obrtanjem jednog svoda krive $y=\sin x$ oko apscisne ose.

**2599.** Luk krive $y=\operatorname{tg} x$ od tačke $(0, 0)$ do tačke $\left(\frac{\pi}{4},\ 1\right)$ obrća se oko apscisne ose, izračunati površinu tako nastale površi.

**2600.** Naći površinu tela koje nastaje obrtanjem petlje krive $9ay^2=$ $=x(3a-x)^2$ oko apscisne ose.

**2601.** Luk kruga $x^2+y^2=a^2$ koji leži u prvom kvadrantu, obrće se oko svoje tetive; izračunati površinu tako nastalog tela.

**2602.** Naći površinu površi koja nastaje obrtanjem oko $x$-ose luka krive

$$x=e^t\sin t,\quad y=e^t\cos t \qquad \text{od } t_1=0 \text{ do } t_2=\frac{\pi}{2}$$

**2603.** Naći površinu tela koje nastaje obrtanjem astroide $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ oko apscisne ose.

**2604.** Luk cikloide obrće se oko svoje ose simetrije; naći površinu tako nastale površi (vidi zad. 2568).

**2605.** Naći površinu tela koje nastaje obrtanjem kardioide $\rho=a(1+\cos\varphi)$ oko polarne ose.

**2606.** Krug $\rho=2r\sin\varphi$ obrće se oko polarne ose; naći površinu tako nastalog tela.

**2607** Izračunati površinu tala koje nastaje obrtanjem lemniskate $\rho^2=$ $=a^2\cos 2\varphi$ oko polarne ose.

**2608.** Beskonačni luk krive $y=e^{-x}$ koji odgovara pozitivnim vrednostima promenljive $x$, obrće se oko $x$-ose; naći površinu tako nastale površi.

**2609.** Naći površinu beskrajnog vretena koje nastaje obrtanjem traktrise $x=a\left(\cos t+\ln\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right)$, $y=a\cdot\sin t$ oko apscisne ose.

# Rješenja

**2594.** $\frac{56}{3}\pi a^2$.

**2595.** $\frac{\pi}{9}\left(\sqrt{(1+a^4)^3}-1\right)$.

**2596.** $\frac{\pi a^2}{4}(e^2-e^{-2}+4)$.

(Vidi uputstvo uz zadatak 2588.)

**2597.** $2\pi b^2+\frac{2\pi ab}{\varepsilon}\arcsin\varepsilon$ i

$2\pi a^2+\frac{\pi b^2}{\varepsilon}\ln\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}$, gde je

$\varepsilon$ — ekscentricitet elipse.

**2598.** $\pi[\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})]$.

**2599.** $\pi\left[\sqrt{5}-\sqrt{2}+\ln\frac{2\sqrt{2}+2}{\sqrt{5}+1}\right]$.

**2600.** $3\pi a^2$.

**2601.** $\pi a^2\sqrt{2}\left(2-\frac{\pi}{2}\right)$.

**2602.** $\frac{2\pi\sqrt{2}}{5}(e^{\pi}-2)$. **2603.** $\frac{12}{5}\pi a^2$.

**2604.** $8\pi a^2\left(\pi-\frac{4}{3}\right)$.

**2605.** $\frac{32}{5}\pi a^2$. **2606.** $4\pi^2 r^2$.

**2607.** $2\pi a^2(2-\sqrt{2})$.

**2608.** $\pi[\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})]$.

**2609.** $4\pi a^2$.